



MINISTERUL EDUCAȚIEI

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 11.02.2023**  
**CLASA a X- a**

**Problema 1**

Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x^3 + x + 2 = \sqrt[3]{3x^2 + 3x}$ .

**Problema 2**

Determinați funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că

$$f(2f(x) + y) - f(2f(y) - x) = x, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 3**

Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ , distincte două câte două astfel încât  $z_1 + \frac{1}{z_2} = z_2 + \frac{1}{z_3} = z_3 + \frac{1}{z_1}$ .

Arătați că  $z_1 z_2 z_3 \in \mathbb{R}$  și  $|z_1 z_2 z_3| = 1$ .

**Problema 4**

Fie  $E_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}$ , unde am considerat  $n$  radicali,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a) Calculați  $[E_n]$  unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ ;
- b) Arătați că  $\{E_n\} > \frac{1}{5}$ , unde  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $a$ .

**NOTĂ:** *Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Timp efectiv de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.*